黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Thursday at 11:10pm
max-plus代数の楽しみ

$\mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$ に入るmax-plus代数の演算は

$$a \oplus b = \max\{a, b\},$$
$$a \otimes b = a + b.$$

$\oplus$ の単位元(零元)は $-\infty$ で、$\otimes$ の単位元は 0 です。この演算をすべて $\exp$ して、$\mathbb{R}_{\geqq 0}$ に同型な構造

$$A \oplus B = \max\{A, B\},$$
$$A \otimes B = AB.$$

を考えた方がわかりやすいと感じる人もいるかも。ここで $A = e^a, B = e^b$ です。この表示で max-plus 代数は普通の環構造の足し算を max に置き換えたものに過ぎません。

これの何が面白いのか。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Thursday at 11:21pm
続き

max-plus 代数の構造に似た構造は1変数多項式の次数に見られます。多項式 f の次数を $\deg f$ と書くと、係数がすべて非負の多項式 f, g について、

$$\deg(f+g) = \max\{\deg f, \deg g\},$$
$$\deg(fg) = \deg f + \deg g.$$

前者の等式は係数が非負という仮定を外すと $<$ となることがあります。例えば $(x^2+1)+(-x^2+x) = x+1$ で左辺の括弧の中の多項式の次数は2なのに、足すと最高次の項が消えて1次になる。係数が0以上ならこのようなことは起こりません。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Thursday at 11:38pm
max-plus代数の構造は「非負のものしか扱わない」という話と関係があります。

負の数をなぜか頑なに扱おうとしない小学校の学習指導要領の世界に戻るような話になります。

非負のものしか扱わないことにすると環構造における引き算が自由にできなくなります。

一般に半環(semiring)は、引き算だけは自由にできなくてもよい様に環の公理を弱めることによって定義されます。半体(semifield)についても同様です。

例えば $\mathbb{Z}_{\geqq 0}$ は通常の和と積についてsemiringになり、$\mathbb{R}_{\geqq 0}$ は通常の積と和についてsemifieldになります。

そして $\mathbb{R} \sqcup \{-\infty\}$ はmax-plus演算についてsemifieldになります。$\mathbb{Z}_{\geqq 0} \sqcup \{-\infty\}$ はmax-plus 演算でsemiringになる。:

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Thursday at 11:45pm
引き算は自由にできなくてよいとするだけで、見慣れない例が急激に増えます。その見慣れない例の典型例が max-plus 代数です。

数学的にはpositivityがあるか否かは重要な問題になることが多く、そういう場合を扱うときには環を半環に一般化する方が自然です。

こういう見方は相当に広い数学に適用できる普遍的なものの見方として意味がある。。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 12:02am
max-plus演算はある種の極限の形で自然に現れます。

漸近挙動を解析するための基本的な道具にラプラスの方法があります。

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{nf(x)}g(x)\,dx$ 型の積分に $n \to \infty$ での挙動は $f(x)$ が最大になる点の近くの様子で決まるというのがラプラスの方法の基本アイデアです。

積分を和に置き換えるとmax-plus演算が極限として得られます。$n \to \infty$で、

$$\frac{1}{n}\log(e^{na} + e^{nb}) \to \max\{a, b\},$$
$$\frac{1}{n}\log(e^{na}e^{nb}) = a + b.$$

より一般に

$$\frac{1}{n}\log\sum_{i=1}^{r} e^{na_i} \to \max\{a_1, \dots, a_r\}.$$

これはラプラスの方法の特別な場合とみなせます。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 12:13am

文字 x の非負係数の多項式の次数を考えるとmax-plus演算が自然に現れたのも、$x \to \infty$ での多項式函数の漸近挙動を見ているとみなせます。

以上の話をまとめると、ありがちな漸近挙動の分析で max-plus 代数が自然に出て来てしまうことがわかります。

自然に出て来るものから逃げ切ることはできないので、max-plus代数から逃げ切ることはできません。

こういう事情になっているので、max-plus代数は数学のあちこちで役に立つことになる。

だから、max-plus代数への興味の持ち方は各数学者ごとに違っていてよいわけです。

面白い話が色々あります。

トロピカル幾何と量子展開環のクリスタル基底の話は面白い話の典型例です。:

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 12:21am

引き算を自由にできない環もどき(半環)であっても非常に役に立つという事実は、通常の環の世界に心がトラップされて抜け出せなくなってしまった人には良い薬だと思います。

極限をとって得られる「max-plus代数的世界」の様子は極限を取る前の「通常の世界」の様子を反映しており、その結果、「通常の世界」を扱うために「max-plus代数的世界」の研究が役に立つことになり、逆も言えます。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 7:08am

所謂「トロピカル数学」とは、大雑把に言って、「極限」を取って得られる「max-plus代数的世界」と極限を取る前の「通常の世界」のあいだを行ったり来たりする数学の話です。

よくあるパターンでは、「max-plus代数的世界」は組み合わせ論的な数学の話になっており、「通常の世界」は連続的な数学の世界になっています。それらが非自明に結び付くところが面白いわけです。

ちょっと面白いことに、どちらの世界を熱帯(トロピカル)とみなすかについて2つの流儀があります。

私自身は、通常の連続的な世界は温度が高い世界で、温度を下げる極限ですべてが凍り付いて組み合わせ論的世界が現われると思いたいので、通常の連続的な世界の方が熱帯で、max-plus代数的世界は凍り付いた世界とします。

しかし、私の側とは逆にmax-plus代数的世界を熱帯だとする流儀の方が優勢。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 7:21am
文献紹介。私がやっていることにもろに関係がある話は以下のリンク先にあるような数学です。

野海正俊
トロピカルRSK対応と離散戸田方程式
2003-02
repository.kulib.kyoto-u.ac.jp...

Noumi-Yamada 2002
arxiv.org/abs/math-ph/0203030

これらを読めば、極限を取った先のmax-plus代数的世界が組み合わせ論的に記述される世界になっており、極限を取る前の通常の世界は連続的な数学の世界になっている話の具体的例が得られます。

行列の計算をできれば読めると思います。

max-plus代数への極限は超離散極限と呼ばれることがあります。

解析学的には漸近挙動を調べるときの常套手段のラプラスの方法の特別な場合です。

$a \oplus a = a$ が成立するタイプの半環の世界に行って戻って来ない話とは違う。行ったり来たりする。

私のイメージでは温度を絶対零度にしたり、温度を上げて解かしたりする。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 7:36am
統計力学で絶対温度 T は

$$Z = \sum_i e^{-E_i/T}$$

の形で登場します。そして自由エネルギー F は

$$F = -T \log Z$$

です。ラプラスの方法の特殊な場合(もしくは直接的な議論)によって、$T \to +0$ の極限で

$$F \to -\max\{-E_i\} = \min\{E_i\}.$$

となります。絶対零度では基底状態に凍り付く。

符号の関係で極限が max-plus ではなく、min-plus になりますが、本質的には同じことです。

統計力学も含めて色々数学を知っていれば max-plus もしくは min-plus 代数への極限を取ることと、極限を取る前の通常の状況を考えることは、数学的によくあるパターンの１つであることがわかり、精神的抵抗は無くなります。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 7:56am
通常の環や体の世界をsemiringやsemifieldの世界に広げると、比較できる数学の世界が大幅に広がる。

つまらない一般論として広がるのではなく、強烈に具体的な数学的対象を比較できるようになる。

大体において、数学における抽象化や一般化はそういうことをする洗練された手段だと思っておくと、色々楽しいです。

max-plus 代数は $a \oplus a = a$ を満たしています。

大雑把には、$a \oplus a = a$ を満たす半環にノイマン級数

$$a^* = 1 \oplus a \oplus a^{\otimes 2} \oplus \cdots$$

のような単項演算 ( )* (Kleene star)を付け加えたものがKleene代数です。ノイマン級数は数学の世界に普遍的に現れます。

正規表現における「aとb どちらかに一致」を $a \oplus b$ とし、「aとbの並び」を $a \otimes b$ とし、「aの繰り返し」をa^*とすればKleene代数の例が得られます。

Kleene starも含めたトロピカル数学はあるんですかね?

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 11:38am

量子展開環(量子群)の話との関係

実は q 類似におけるパラメーター q は $q=e^{-1/T}$ のようなものだとみなせます。だから、絶対零度 $T \to +0$ と $q=0$ が対応しているとみなせます。

絶対温度無限大 $T \to +\infty$ が $q \to 1$ に対応しており、$q \to 1$ は q 類似からもとのスタイルに戻ることを意味しています。

絶対温度 T	q 類似
$T \to +\infty$	$q=1$ の通常の場合 $U(\mathfrak{g})$
$0 < T < +\infty$	量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$
$T \to +0$	$q=0$ での結晶基底

量子展開環の余積の定義を上手に設定すれば、量子展開環の表現論で $q \to 0$ の「極限」を取れるようにできます。

そのようにして現わる数学が柏原正樹さんの結晶基底です。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 11:48am

量子展開環(量子群)において絶対零度 $q \to 0$ を考えることと、トロピカル数学でmax-plus代数が出て来る極限を考えることは異なります。

しかし、表現論的にはそれらは似た話に見える。

実際、柏原さんの結晶基底の理論のトロピカル的類似にBerenstein-Kazhdanの幾何結晶の理論があります。

arxiv.org/abs/math/0610567

絶対零度ではすべてが凍り付いて組み合わせ論的な言葉ですべてを語ることができます。量子展開環のケースでは結晶基底が現われる。

幾何結晶はそれをトロピカル的に解かして得られる連続的な数学的対象です。

講演で話しただけなのですが、私が開発した方法を使うと、幾何結晶の「正準」量子化を考えることができます。

パラメーター q で記述される非可換性を入れても色々うまく行く。

math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTe...

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 12:10pm

半環の話に戻る

max-plus代数のようなものも扱いたいので引き算が自由にできなくてもよい環(半環)を考えます。

max-plus代数では

$$a \oplus b = \max\{a, b\}$$

なので

$$a \oplus a = a$$

です。だから $\oplus$ の逆演算としての引き算をできるように拡張できたとすると、両辺から a を引いて

$$a = -\infty$$

となってしまいます(max-plus代数での零元は $-\infty$)。すべてが $-\infty$ に潰れてしまう。

こういう事情があるので、引き算を自由にできるように半環を拡張することは一般にはできません。

そして、引き算を自由にできないmax-plus代数のようなケースが様々な分野の数学と関係しているわけです。

「引き算がないと困るという思い込み」から離脱することが大事。安易に可換環でやっていたことを半環でやる必要はない。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 12:35pm

sciencedirect.com/science/arti...
に目を通しました！(読んではいない)

max-plus代数での「線形代数」の話。

max-plus代数において行列式の役目を果たすのはパーマネントだと書いてありました。だから、引き算はいらないという仕組みのようです。

あとドミナントというのを新たに定義することが大事だと書いてあるように見えました。

後でまた眺めてみるかも。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Friday at 12:55pm

結局、全頁に目を通してしまった。(読んではいない。)

詳細はテクニカルに面倒なのですが、方針は単純で、max-plus代数の要素を成分に持つ行列 $A = [a_{ij}]$ 達を直接扱うのではなく、それに対応する z の函数を成分に持つ行列 $z^A = [z^{a_{ij}}]$ を考え、z^A 達に対して普通の線形代数の操作を施して、その $z \to \infty$ での漸近挙動を調べて、max-plus代数の世界に戻って来るという議論になっています。

そういう筋道はmax-plus代数を扱うときにはやはり基本的なのだと思いました。

max-plus代数の世界に行って戻って来ないのではなく、一度普通の世界に戻って来て、漸近挙動を調べること経由でmax-plus代数の世界に再度訪れる。

max-plus代数の世界は組み合わせ論っぽい話になるのですが、それを一度連続的な数学の世界に戻して解析する。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 13 hours ago

$\ell = (l_1, \dots, l_r)$ に対する $\log\operatorname{sum}\exp \ell$ は

$$\log\operatorname{sum}\exp \ell = \log \sum_{i=1}^{r} \exp l_i$$

と定義されます。この函数は数値計算的に意味を持ちます。

例えば、大偏差原理によって確率関係の数値には指数函数的違いが出ることが多いです。巨大な数と微小な数が $x = (x_1, \dots, x_r)$ の中に同居することがある。そのような場合には対数をとった $\ell = (\log x_1, \dots, \log x_r)$ の方を数値的に扱う方が合理的です。対数を取る前の和を対数を取った後の量で表す函数が $\log\operatorname{sum}\exp$ です。

max-plus代数の話と次の関係がある: $n \to \infty$ で

$$\frac{1}{n} \log\operatorname{sum}\exp(n\ell) \to \max(\ell).$$

$\log\operatorname{sum}\exp$ は $\max$ の仲間です。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 12 hours ago

閉区間 $[a,b]$ 上の正値連続函数 g を固定します。

閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数 f に対する $\log\operatorname{int}\exp f$ を

$$\log\operatorname{int}\exp f = \log\int_a^b \exp(f(x))g(x)\,dx$$

と定義しましょう。このとき、$n\to\infty$ で

$$\frac{1}{n}\log\operatorname{int}\exp(nf) \to \max(f) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

すなわち

$$\int_a^b \exp(nf(x))g(x)\,dx = \exp(n\max(f)+o(n)).$$

これは「ラプラスの方法の弱いバージョン」です。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 11 hours ago

大雑把に言えば、確率論において大偏差原理が成立するとは、確率 $P(\ \ )$ について

$$\frac{1}{n}\log P(U_n\in[a,b]) \to \sup_{u\in[a,b]} S(u)$$

すなわち

$$P(U_n\in[a,b]) = \exp\left(n\sup_{in[a,b]} S(u)+o(n)\right)$$

のようなことが成立することです。すなわち確率の漸近挙動の評価にラプラスの方法(の弱いバージョン)が使えることです。($S(u)$ が(相対)エントロピー。Sanovの定理で $S(u)$ はKullback-Leibler情報量の -1 倍)

こういう経路で、max-plus代数の話を確率論における大偏差原理に繋げることができます。

数学は全部繋がっている。

黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

数学は違うことを同じ視点から眺める技術でもあるので、社会的に異なる分野だとみなされている数学も数学内では様々な視点から全部繋がっているとみなす。

数学的にではなく、社会的に、数学を解析・代数・幾何に分類したりするが、数学内部にどっぷりはまった人から見れば単なるフィクション。そんな分類はどうでもよい。数学的にはその手の分類は完全に無視しまくるのが正しいと思う。

註：社会的な分類は多くの場合「予算の都合」(社会的に投入するリソースの調整の都合)で導入される。そのような都合で導入されている分野の分類を受け入れないためには強い精神が必要。

2017年06月11日 09:08 · Web · 0 · 3 · Webで開く